EZ-OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	GUZTIRA

Iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{L}(6n)}{\mathrm{L}(3n)}\right)^{\mathrm{L}\,n}$

(Puntu 1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{L}(6n)}{\mathrm{L}(3n)}\right)^{\mathrm{L}\,n}=1^{\infty}=A \quad\Rightarrow\quad \mathrm{L}\,A=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\,n\cdot\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{L}(6n)}{\mathrm{L}(3n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\,n\cdot\left(\frac{\mathrm{L}(6n)}{\mathrm{L}(3n)}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\,n\cdot\frac{\mathrm{L}(6n)-\mathrm{L}(3n)}{\mathrm{L}(3n)}=\lim_{n\to\infty}\big(\mathrm{L}(6n)-\mathrm{L}(3n)\big)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(\frac{6n}{3n}\right)=\mathrm{L}(2)$$

Orduan, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{L}(6n)}{\mathrm{L}(3n)}\right)^{\mathrm{L}\,n}=2$

2.- Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n\cdot\mathrm{L}n}{a^n\cdot n^3}$ **seriearen izaera,** $a>0$ **parametroaren balioen arabera.**

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\mathrm{L}n}{a^n\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$a_n=\dfrac{4^n\cdot\mathrm{L}n}{a^n\cdot n^3}>0 \quad \forall n$. D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot \mathrm{L}(n+1)}{a^{n+1}\cdot (n+1)^3}\cdot\frac{a^n\cdot n^3}{4^n\cdot \mathrm{L}n}=\frac{4}{a}\begin{cases} <1 & \Leftrightarrow \quad a>4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ >1 & \Leftrightarrow \quad a<4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ =1 & \Leftrightarrow \quad a=4 \quad \Rightarrow \quad \text{zalantzazko kasua da} \end{cases}$$

Azken kasua aztertuko dugu orain:

$a=4 \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{\mathrm{L}n}{n^3}<\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$. Eta, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konbergentea da (Riemann-en seriea). Beraz, konparaziozko irizpidea erabiliz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ere konbergentea da.

3.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\arcsin x+\arcsin y+\mathrm{L}\left(x^2+y^2-\frac{1}{4}\right)}{(x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)}$$

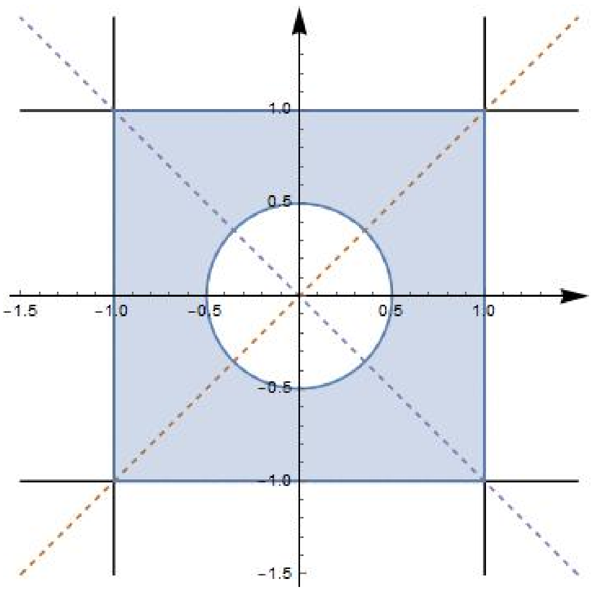
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le x\le 1, -1\le y\le 1,\ x^2+y^2-\frac{1}{4}>0,\ (x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)\neq 0\right\}$$

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2>\frac{1}{4}$$

$$(x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(x-y)^2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y\neq 0 \\ x-y\neq 0 \end{cases}$$



4.- <u>Diferentziala erabiliz</u>, kalkulatu $f(1.1,-0.1)$-ren <u>balio hurbildua</u>, $f(x,y)=e^{xy}$ izanik.

(Puntu 1)

$f(x,y)=e^{xy}$ diferentziagarria da $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f \simeq df \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Emaitza hori (1,0) puntuan aplikatuz:

$$\Delta f = f(1.1,-0.1)-f(1,0)\simeq df(1,0)=f'_x(1,0)dx+f'_y(1,0)dy$$

non $dx=0.1$ eta $dy=-0.1$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=ye^{xy} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,0)=0 \\ f'_y(x,y)=xe^{xy} \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1.1,-0.1)-f(1,0)\simeq dy=-0.1$$

Beraz, $f(1.1,-0.1)\simeq f(1,0)-0.1=1-0.1=0.9$

5.- a) Froga ezazu $\begin{cases} F(x,y,z,t)=x^2-\sin(xy)+zt=0 \\ G(x,y,z,t)=z^2+\cos(xy)-2t+3=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $\begin{cases} z=z(x,y) \\ t=t(x,y) \end{cases}$ **funtzio-sistema diferentziagarria definitzen duela** $P(x,y,z,t)=(0,1,0,2)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Kalkula ezazu $z=z(x,y)$ **funtzioaren aldakuntzaren abiadurarik handiena (0,1) puntuan.**

(2.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuz:

i. $\begin{cases} F(P)=0 \\ G(P)=1-4+3=0 \end{cases}$

ii. F eta G funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z,t)=(0,1,0,2)$ puntuaren ingurunean:

$$\begin{cases} F'_x=2x-y\cos(xy) & F'_y=-x\cos(xy) & F'_z=t & F'_t=z \\ G'_x=-y\sin(xy) & G'_y=-x\sin(xy) & G'_z=2z & G'_t=-2 \end{cases}.$$

iii. $$\left|\frac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_z(P) & F'_t(P) \\ G'_z(P) & G'_t(P) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4\neq 0$$

Beraz, $P(x,y,z,t)=(0,1,0,2)$ puntuaren ingurunean $\exists!\begin{cases} z=z(x,y) \\ t=t(x,y) \end{cases}$ diferentziagarria, $\begin{cases} z(0,1)=0 \\ t(0,1)=2 \end{cases}$ izanik.

b) $z=z(x,y)$ funtzioa arinen aldatzen da gradientearen norabidean, eta, abiadurarik handiena, bektore horren modulua da. Beraz, $\overrightarrow{\nabla} z(0,1)=\left(z'_x(0,1),z'_y(0,1)\right)$ bektorea kalkulatu behar dugu.

Horretarako, hasierako sisteman x-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 2x - y\cos(xy) + t \cdot z'_x + z \cdot t'_x = 0 \\ -y\sin(xy) + 2z \cdot z'_x - 2 \cdot t'_x = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} -1 + 2 \cdot z'_x(0,1) = 0 \\ -2 \cdot t'_x(0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z'_x(0,1) = \frac{1}{2}$$

Eta, era berean, *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} -x\cos(xy) + t \cdot z'_y + z \cdot t'_y = 0 \\ -x\sin(xy) + 2z \cdot z'_y - 2 \cdot t'_y = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2z'_y(0,1) = 0 \\ -2 \cdot t'_y(0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z'_y(0,1) = 0$$

Orduan, $\overrightarrow{\nabla z}(0,1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, (*z* funtzioa arinen aldatzen da OX ardatzaren norabidean), eta,

$\left|\overrightarrow{\nabla z}(0,1)\right| = \frac{1}{2}$ abiadurarik handiena da.

6.- Aurkitu $x^2+2y^2=2$ baldintza betetzen duten $f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioaren muturrak.

(2 puntu)

$x^2+2y^2=2$ baldintza betetzen duten puntuak elipse batean egongo dira, multzo itxi eta mugatuan, hain zuzen ere. Horrez gain, f funtzio jarraitua da, beraz Weiertrass-en teoremaren baldintzak betetzen dira, eta, f-ren mutur absolutuak $x^2+2y^2=2$ multzoan kalkulatzen ari garela esan dezakegu.

Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz baliatuko gara puntu kritikoak lortzeko:

$$w(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+2y^2-2\right)$$

$$\begin{cases} w'_x=2x+2\lambda x=2x(1+\lambda)=0 \quad (*) \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \overset{(***)}{\Rightarrow} y=\pm 1 \\ \lambda=-1 \overset{(**)}{\Rightarrow} y=0 \end{cases} \\ w'_x=2y+4\lambda y=2y(1+2\lambda)=0 \quad (**) \quad \Rightarrow \begin{cases} y=0 \overset{(***)}{\Rightarrow} x=\pm\sqrt{2} \\ \lambda=-1/2 \overset{(*)}{\Rightarrow} x=0 \end{cases} \\ x^2+2y^2=2 \quad (***) \end{cases}$$

Beraz, lau puntu kritiko baldintzatu ditugu:

$$A(0,1),\ \lambda=-\frac{1}{2} \quad B(0,-1),\ \lambda=-\frac{1}{2} \quad C\left(\sqrt{2},0\right),\ \lambda=-1 \quad D\left(-\sqrt{2},0\right),\ \lambda=-1$$

Eta, euren artean maximo eta minimo absolutuak daude. Horietako bakoitzean f-ren balioa kalkulatuz:

$$f(A)=1 \quad f(B)=1 \quad f(C)=2 \quad f(D)=2$$

Beraz, A eta B minimoak eta C eta D maximoak dira.

OHARRA: Kalkulatutako mutur baldintzatuak mutur absolutuak direla ez badugu justifikatzen, orduan puntu kritikoak sailkatu behar dira bigarren diferentzialaren zeinua aztertuz:

$$\begin{cases} w''_{x^2}=2(1+\lambda) \\ w''_{xy}=0 \\ w''_{y^2}=2(1+2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2w(A)=d^2w(B)=(dx)^2>0 \Rightarrow A \text{ eta } B \text{ minimoak} \\ d^2w(C)=d^2w(B)=-2(dy)^2<0 \Rightarrow C \text{ eta } B \text{ maximoak} \end{cases} \quad (*)$$

(*) $d^2w(A)=d^2w(B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad dx=0$ eta $d^2w(C)=d^2w(D)=0 \quad \Leftrightarrow \quad dy=0$

Baina, baldintza bat dagoenez:

$$x^2+2y^2=2 \quad \Rightarrow \quad 2xdx+4ydy=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} A \text{ eta } B \text{ puntuan}: \quad dy=0 \\ C \text{ eta } D \text{ puntuan}: \quad dx=0 \end{cases} \Rightarrow \quad d^2w\neq 0$$

7.- Kalkulatu $\int_{-1}^{e} \frac{e}{x^2} dx$

(Puntu 1)

$I = \int_{-1}^{e} \frac{e}{x^2} dx = \int_{-1}^{e} f(x) dx$ non $f(x) = \frac{e}{x^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-1, e] - \{0\}$

Eta, $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singularra da.

Orduan, $I = \int_{-1}^{e} f(x) dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{e} f(x) dx = I_1 + I_1$

Eta, *I* konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1 eta I_2 konbergenteak dira.

$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{e}{x^2} dx = -\frac{e}{x}\bigg|_{-1}^{0} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{e}{x} + \frac{e}{-1} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1$ dibergentea da, eta, ondorioz, baita *I* ere.

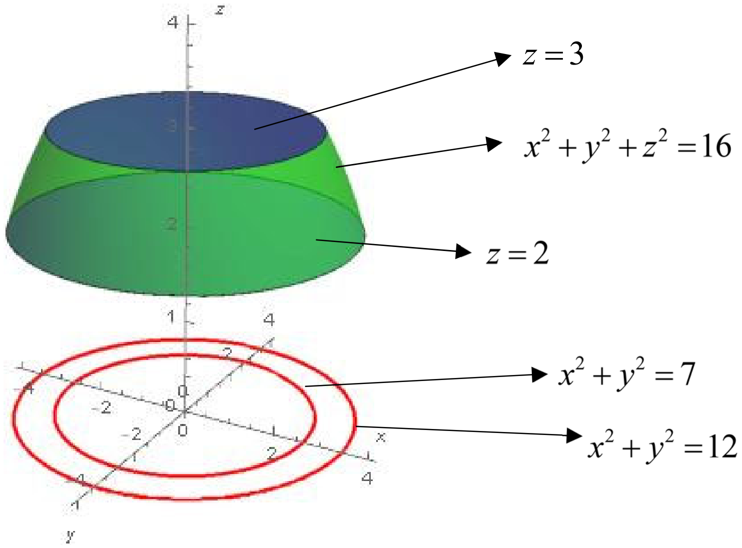
$f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad I = \infty$

8.- a) Kalkulatu $x^2+y^2+z^2=16$ esferak, eta, $z=2$ eta $z=3$ planoek mugaturiko *V* solidoaren bolumena.

b) Aurkitu *V* muga osatzen duen esferaren zatiaren azalera.

(2.5 puntu)

a) $BOL(V)=\iiint\limits_V dxdydz$ non $V\equiv\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le 16\\ 2\le z\le 3\end{cases}\equiv\begin{cases}z\le\sqrt{16-x^2-y^2}\\ 2\le z\le 3\end{cases}$



Zilindrikoetan:

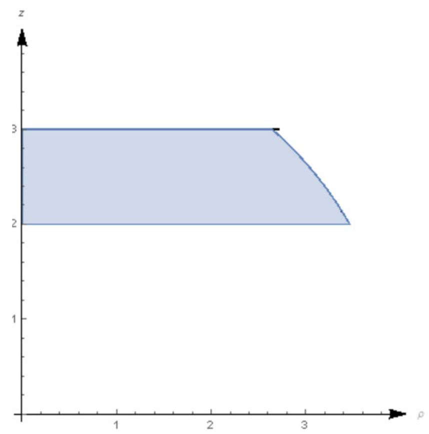
$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad V\equiv\begin{cases}\rho^2+z^2\le 16\\ 2\le z\le 3\end{cases}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{7}\\ 2\le z\le 3\end{cases}\cup\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ \sqrt{7}\le\rho\le\sqrt{12}\\ 2\le z\le\sqrt{16-\rho^2}\end{cases}$$

$$BOL(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}}\int_2^3\rho\,dz\,d\rho\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}}\int_2^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{7}}\rho\,d\rho+2\pi\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}}\rho\left(\sqrt{16-\rho^2}-2\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{7}}+2\pi\left[-\frac{\left(16-\rho^2\right)^{3/2}}{3}-\rho^2\right]_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}}=7\pi+\frac{8\pi}{3}=\frac{29\pi}{3}$$

Beste integrazio ordenetan plantea daiteke integral bakar bat lortzeko, solidoa $\theta=\theta_0$ (ρz) planoan proiektatuz:



$$V \equiv \begin{cases} \rho^2 + z^2 \leq 16 \\ 2 \leq z \leq 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{16 - z^2} \end{cases}$$

$$BOL(V) = \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_2^3 \frac{16 - z^2}{2} \, dz = \pi \left[16z - \frac{z^3}{3} \right]_2^3 = \frac{29\pi}{3}$$

b) $Azalera\left(S\right) = \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy = \iint_{R_{xy}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dxdy$

non $\begin{cases} S \equiv z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in R_{xy} \equiv 7 \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ \vec{N} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \end{cases}$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv R_{\theta\rho} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \sqrt{7} \leq \rho \leq \sqrt{12} \end{cases}$

$$Azalera\left(S\right) = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} \frac{4\rho}{\sqrt{16 - \rho^2}} d\rho \, d\theta = 2\pi \left[-4\sqrt{16 - \rho^2} \right]_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}} = -8\pi\left(2 - 3\right) = 8\pi$$

9.- $\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}+x^2\cdot\vec{k}$ **funtzio bektoriala eta** $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \text{ non } -2\le z\le 1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4z \text{ non } 1\le z\le 4 \end{cases}$ **gainazalak emanik:**

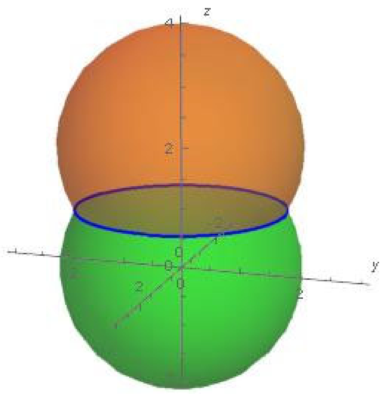
a) Kalkulatu $\vec{F}$-ren zirkulazioa aurreko gainazalen arteko C ebakidura-kurban zehar.

b) Kalkulatu aurreko solidoaren mugatik irteten den fluxua $\vec{F}$ funtzioaren eraginez.

c) Kalkulatu solido horren mugako S_1 gainazalaren zatitik irteten den fluxua $\vec{F}$ funtzioaren eraginez.

(3 puntu)

a)



$\vec{F}$-ren zirkulazioa C kurba itxian zehar:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(dx + x^2dz\right)$$

non $C \equiv S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow 4z=4 \Leftrightarrow z=1$

Beraz, $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \quad \Rightarrow \quad dz=0 \end{cases}$

Orduan, $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C dx = \int_a^a dx = 0$

$a \in C$ edozein puntu delarik

b) Emandako solidoaren muga $S \equiv S_1 \cup S_2$ gainazal itxia da, eta, hortik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua honako hau da:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Baina $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, eta, S gainazal itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} \overset{GAUSS}{=} \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0$$

c) S_1 gainazalaren zatitik irteten den fluxua hurrengo integralak ematen du:

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) dxdy$$

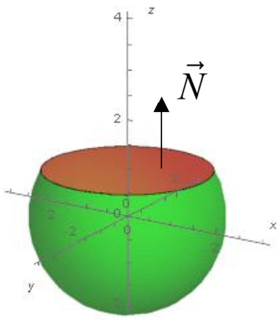
$div\left(\vec{F}\right)=0$ kontuan izanik, integral hori kalkulatu beharrean, berriro Gauss-en teorema erabiliko dugu.

Beraz, izan bitez:

$S_3 \equiv z = 1 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 3$,

eta

$S' \equiv S_1 \cup S_3$ gainazal itxi berria, marrazkian erakusten den V' solido berria mugatzen duena.



Orduan, gainazal honetatik irteten den fluxua honako da:

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} \overset{GAUSS}{=} \iiint_{V'} \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Eta, orain, azken integral hau kalkulatuko dugu:

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) dxdy \overset{(1)}{=} \iint_{R_{xy}} x^2 dxdy \overset{(2)}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 \cdot \cos^2\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{9}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{4}$$

(1) $\vec{N} = (0,0,1)$ eta $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$

(2) Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv R_{\theta\rho} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \end{cases}$

Beraz, $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{9\pi}{4}$